



Научная статья
УДК 631.171:338.43.02
doi: 10.55186/25876740_2024_67_1_94

ПРИБЛИЖЕННАЯ ЦИФРОВАЯ МОДЕЛЬ ДЕПРЕССИИ РОСТА И РАЗВИТИЯ РАСТЕНИЙ

В.Г. Григулецкий

Кубанский государственный аграрный университет имени И.Т. Трубилина, Краснодар, Россия

Аннотация. Разработана новая количественная (цифровая) методика оценки роста и продуктивности сельскохозяйственных растений. Учитывая результаты лабораторных, вегетационных и полевых опытов Э.А. Митчерлиха, А.Т. Кирсанова, Д.А. Сабина и других почвоведов, в статье предлагается цифровая модель депрессии роста растений, когда, например, при внесении большого количества растворимых удобрений (или любого другого фактора роста) следует снижение урожайности; при увеличении температуры воздуха урожай растений повышается, но при очень высокой температуре воздуха происходит засыхание растений и т.д. Для условий депрессии роста растений академик Э.А. Митчерлих предложил использовать уравнение: $y(x) = A(1 - 10^{-cx}) \cdot 10^{-kx^2}$, k – коэффициент повреждения (коэффициент депрессии): установлено, что это решение является ошибочным. В статье получено новое решение задачи о депрессии роста, учитывающее особенности роста и развития растений. В новой цифровой модели роста и продуктивности растений принято, что урожайность (y) и ее прибавка возрастают при увеличении количества факторов роста (x), пропорционально количеству урожая ($A-y$), не достигнутого до предельной потенциальной урожайности (A), и возможному значению урожая ($B+y$), выше некоторого минимального (начального) значения (B) урожая. В статье получены простые общие формулы, определяющие запас питательных веществ в почве, величину урожайности, коэффициент депрессии и др.; рассмотрены примеры расчетов.

Ключевые слова: коэффициент действия фактора роста, депрессия роста и развития растения, дифференциальное уравнение первого порядка, начальные условия, частное решение

Original article

APPROXIMATE DIGITAL MODEL OF DEPRESSION GROWTH AND DEVELOPMENT OF PLANTS

V.G. Griguletsky

Kuban State Agrarian University named after I.T. Trubilin, Krasnodar, Russia

Abstract. A new quantitative (digital) method for assessing the growth and productivity of agricultural plants has been developed. Taking into account the results of laboratory, vegetation and field experiments, E.A. Mitcherlich, A.T. Kirsanova, D.A. Sabinina and other soil scientists, the article proposes a digital model of plant growth depression, when, for example, when a large amount of soluble fertilizers (or any other growth factor) is applied, a decrease in yield follows; with an increase in air temperature, the yield of plants increases, but at a very high air temperature, plants dry out, etc. For conditions of plant growth depression, Academician E.A. Mitcherlich proposed to use the equation: $y(x) = A(1 - 10^{-cx}) \cdot 10^{-kx^2}$, k – damage coefficient (depression coefficient): it was found that this solution is erroneous. In the article, a new solution to the problem of growth depression is obtained, taking into account the peculiarities of plant growth and development. In the new digital model of plant growth and productivity, it is assumed that the yield (y) and its increase increase with an increase in the number of growth factors (x), in proportion to the amount of yield ($A-y$) that has not reached the maximum potential yield (A), and the possible value yield ($B+y$), above some minimum (initial) value (B) of the crop. In the article, simple general formulas are obtained that determine the supply of nutrients in the soil, the yield value, the depression coefficient, etc.; examples of calculations are considered.

Keywords: growth factor action coefficient, plant growth and development depression, first-order differential equation, initial conditions, particular solution

Актуальность проблемы. Учение о депрессии роста растений, вероятно, впервые экспериментально исследовал академик Макс Эйльхард Альфред Митчерлих (Prof. Dr. Max Eilhard Alfred Mitscherlich, 29.08.1874 г. — 3.02.1956 г.). Отметим, что Э.А. Митчерлих с 1906 по 1941 гг. состоял профессором Кенигсбергского Университета (Германия), в 1909 г. опубликовал «закон совокупного действия факторов роста» для растений; в 1929 г. был избран Иностранном членом (академиком) Академии Наук СССР. Академик Э.А. Митчерлих с 1949 по 1956 гг. был директором Института повышения урожайности Академии наук ГДР. Лабораторные, вегетационные и полевые опыты Э.А. Митчерлиха позволили установить, что только реакция растения на свойства почвы может определять химический состав почвы, плодородие почвы и продуктивность растения; химические методы определения состава почв позволяют найти только условные показатели, потому что в почве постоянно происходят процессы превращений питательных веществ и изменяющих их состав, особенно при поступлении их внутрь растений. Э.А. Митчерлих одним из первых исследовал зависимость урожая от обеспеченности растений элементами питательных веществ почвы; он первым разработал методику количественной (цифровой) оценки питательных веществ в почве. Большое практическое значение в СССР имели первые монографии Э.А. Митчерлиха на русском языке [1, 2]. Э.А. Митчерлих опубликовал более 300 научных статей, он подготовил более 100 учеников; Э.А. Митчерлих был членом редакции журнала «Почвоведение» (СССР) и журнала «Soil Science» (США), он активно участвовал в организации Германской Академии наук в Берлине; результаты исследований Э.А. Митчерлиха являются актуальными и в настоящее время.

Необходимость и актуальность разработки цифровых моделей роста и продуктивности сельскохозяйственных растений (культур) определена в основных положениях Программы «Цифровая экономика Российской Федерации» [3], где отмечается целесообразность создания условий для развития общества знаний, повышения доступности и качества товаров и услуг, произведенных в цифровой экономике с использованием современных цифровых технологий. В частности, в статьях С.Б. Огневцева [4-6] описаны этапы развития информационных технологий: автоматизация, информация, цифровизация и т.д. Рассмотрены тенденции и понятия современного этапа цифровизации и сквозные технологии, предлагаемые программой «Цифровая экономика». Обосновывается необходимость создания цифровой платформы АПК, как важной составляющей современной цифровой экономики. Целью разработки и развития цифровой платформы АПК является увеличение эффективности работы сельскохозяйственных и агропромышленных предприятий за счет широкого внедрения в производственные процессы новых цифровых, в том числе сквозных, технологий и инновационных бизнес-моделей рыночного взаимодействия этих предприятий на основе модели платформы как сервиса. Определяются задачи и структура цифровой платформы, в которую входят субплатформы, соответствующие агропродовольственным рынкам, и модули-приложения, служащие для решения различных практических задач. Выделяются и описываются три основные субплатформы. Предлагается последовательность этапов разработки цифровой платформы. Обосновывается экономический эффект внедрения предлагаемой платформы и необходимость государственных вложений в этот проект [4-6].



В статьях В.И. Меденникова, Ф.И. Ерешко, В.В. Кульба [7-8] с системных позиций рассматривается процесс детерминизации появившихся в связи со всеобщей цифровизацией общества новых понятий: «цифровая экосистема», «экосистема цифровой экономики», «цифровая бизнес-экосистема», «цифровая платформенная экосистема» и т.д. Показано, что бизнес-сообщество в погоне за модными словами, уже не обладающими научной точностью, приводит к упрощению заключенных в них понятий, которые в результате теряют строгую концептуальность, системность, однозначность. Многозначность понятий, усиленная такой же неопределенностью трактовки цифровой платформы, представленной десятками определений, ведет к размыванию и запутыванию научного системного подхода к цифровизации управления реальной экономики, к ее дезинтеграции, то есть ведет к огромному числу вариантов развития данного процесса, препятствующего выполнению основного требования цифровой экономики — максимальной интеграции данных и алгоритмов. Исходя из этого определения и результатов моделирования, рассматриваются методы формирования научно обоснованной цифровой экосистемы агропромышленного комплекса, основу которой составляет единое информационное интернет-пространство цифрового взаимодействия страны, интегрирующего единую цифровую платформу управления производством и единую платформу информационных научно-образовательных ресурсов. Комплексная реализация представленной цифровой экосистемы АПК позволит сократить затраты на выполнение программы цифровой экономики в десятки-сотни раз со значительно большей эффективностью [7].

В работе Н.Н. Сологуб, О.И. Улановой, Н.И. Остробородовой, Д.А. Остробородовой [10] подробно рассматриваются проблемы и перспективы внедрения цифровых технологий в сельское хозяйство Российской Федерации на современном этапе. Проведен анализ состояния аграрного комплекса в контексте инновационного развития. В современном сельском хозяйстве возрастает необходимость в применении современных технологий, в том числе систем сбора, хранения и обработки данных. Использование IT-технологий способствует повышению урожайности и рентабельности сельского хозяйства, снижению материальных затрат, более эффективному распределению средств. Обозначены основные направления цифровизации аграрного сектора, предусматривающие прохождение нескольких этапов. Выделены приоритетные задачи, реализация которых станет возможна благодаря государственной поддержке и согласованной работе всех заинтересованных участников данного процесса. В настоящее время существуют факторы, препятствующие внедрению цифровых технологий в сельское хозяйство; решению существующих проблем будет способствовать разработка новой аграрной технологической политики, включающей совершенствование нормативно-правовой базы, увеличение государственной финансовой поддержки сельхозпроизводителям, внедрение новых образовательных стандартов обучения высококвалифицированных специалистов для цифрового сельского хозяйства [10].

По мнению авторов работы [10], в условиях глобализации для повышения конкурентоспособности своей продукции Россия должна принять вызовы цифровизации и активно внедрять IT-технологии в сельское хозяйство. Цифровые технологии позволяют контролировать полный цикл растениеводства или животноводства — «умные» устройства измеряют и передают параметры почвы, растений, микроклимата и т.д. Все эти данные с датчиков, дронов и другой техники анализируются специальными программами. Мобильные или онлайн-приложения приходят на помощь фермерам и агрономам — чтобы определить благоприятное время для посадки или сбора урожая, рассчитать схему удобрений, спрогнозировать урожай и многое другое. Внедрение передовых информационных технологий сократит объем ручного труда и расходы, повысив при этом производительность и урожайность [10].

В целом, в статьях [4-10] рассмотрены концепция и концептуальные вопросы работы цифровой экономики в АПК, поэтому важно разработать математические (цифровые) модели для конкретных процессов и сельскохозяйственных технологий.

В статьях [11, 12] получено обобщение математической модели академика Э.А. Митчерлиха [13, 14] для «закона действия факторов роста» без учета депрессии роста растений; чтобы исключить повторения, ниже в таблице 1 приведены показатели сравнительного анализа цифровых моделей роста и продуктивности по работам [11-14].

Из таблицы 1 видно, что предложенная в работах [11, 12] цифровая модель роста и продуктивности растений является более общей, чем известная модель академика Э.А. Митчерлиха [12, 13], однако «закон действия

Таблица 1. Сравнительный анализ моделей роста и продуктивности растений
Table 1. Comparative analysis of plant growth and productivity models

№ п/п	Митчерлих Э.А.	Григулецкий В.Г.
<i>Основное уравнение</i>		
1	$\frac{dy}{dx} = k(A - y)$	$\left(\frac{1}{B + y}\right) \frac{dy}{dx} = c(A - y)$
<i>Начальные условия</i>		
2	$y(x_0) = y_0$	$y(x_0) = y_0$
<i>Частное решение</i>		
3	$\lg\left[\frac{(A - y_0)}{(A - y)}\right] = k(x - x_0)$	$\ln\left[\frac{(A - y_0)(B + y)}{(A - y)(B + y_0)}\right] = c(A + B)(x - x_0)$
<i>Максимальный урожай</i>		
4	$A = \frac{y_2^2 - y_1 \cdot y_3}{2y_2 - y_1 - y_3}$	$A + B = \frac{2(y_0 + y_1)(y_0 + y_2)(y_0 + y_3) - (y_0 + y_2)^2(y_1 + y_3 + 2y_0)}{(y_0 + y_1)(y_0 + y_3) - (y_0 + y_2)^2}$
<i>Коэффициент действия фактора</i>		
5	$k = \frac{\lg(A - y_1) - \lg(A - y_2)}{x_2 - x_1}$	$c = \frac{\ln[(A - y_0)(B + y)] - \ln[(B + y_0)(A - y)]}{(A + B)(x - x_0)}$
<i>Количество питательных веществ в почве</i>		
6	$b = \frac{\lg(A) - \lg(A - y_0)}{k}$	$b = \frac{\ln[(A - y_0)(B + y_1)] - \ln[(B + y_0)(A - y_1)]}{(A + B)c}$

факторов роста» имеет вполне определенные пределы применения: при использовании большого количества какого-нибудь фактора роста (например, высокие дозы растворимых удобрений), урожай уменьшается; при большом количестве питательных веществ в почве нельзя получить высокий урожай, так как происходит повреждение стеблей и листьев растений из-за большой концентрации питательного вещества (раствора) в почве, а в концентрированном растворе солей не может расти ни одно растение.

Академик Э.А. Митчерлих совместно с проф. Б. Бауле при обработке опытных данных установили, что каждый из действующих факторов роста, влияющих на рост и развитие растения, имеет оптимальное значение, за которым следует угнетение роста и урожайности, то есть происходит депрессия развития растения, поэтому в основное уравнение была введена «поправка на депрессию» [1, 2]. Поправка на депрессию определяет «второе приближение» закона действия факторов роста Митчерлиха.

В книге А.Т. Кирсанова [15, с. 69] специально отмечается, что «несмотря на всю стройность, изящность и убедительность этих выводов с математической стороны», все же их нельзя признать достаточными для наших целей без предварительной проверки в наших опытах; анализ полученных опытных данных свидетельствует о необходимости уточнения и развития основных положений этой теории.

Сущность депрессии развития растений Э.А. Митчерлих показывает на процессе роста овса при недостатках калийных удобрений и высоких дозах других удобрений; «второе приближение» особенно ценно для тех вариантов, когда используются «односторонние» удобрения, например, применяются калийные удобрения на фоне разных доз азотистых удобрений; в качестве примера, в таблице 2 приведен фактический урожай общей массы зерна и соломы при разных количествах азота (г/сосуд) в опытах Э.А. Митчерлиха.

Первое приближение «закона действия факторов роста» для данных таблицы 1 определено по формуле:

$$y_1(x) = 158,5 \left[1 - 10^{-0,396(x+0,025)} \right].$$

Второе приближение определялось по формуле:

$$y_2(x) = 158,5 \left[1 - 10^{-0,396(x+0,025)} \right] \cdot 10^{-0,011(x+0,025)^2}.$$

Можно, однако, отметить, что данные столбцов 3 и 4 в таблице 2 различаются значительно, что свидетельствует о необходимости уточнения теоретической части «второго приближения» закона действия факторов роста.





Таблица 2. Общий урожай овса в зависимости от доз азотистых удобрений
Table 2. The total yield of oats depending on the doses of nitrogenous fertilizers

Количество азота, г/сосуд	Общий урожай, г		
	полученный Виссманом урожай	вычисленный урожай по второму приближению	вычисленный урожай по первому приближению
1	2	3	4
0,000	6,8 ± 0,38	3,5	3,5
0,125	18,6 ± 0,45	20,3	20,3
0,250	32,6 ± 1,05	35,1	35,1
0,375	46,5 ± 1,01	48,4	48,4
0,50	58,1 ± 0,65	59,9	60,3
0,75	80,3 ± 1,25	79,1	80,3
1,00	95,8 ± 2,03	93,8	96,2
1,50	116,2 ± 2,96	112,3	119,0
2,0	118,2 ± 3,91	120,3	135,5
3,0	116,1 ± 3,02	117,7	148,5
4,0	108,4 ± 4,3	102,5	154,5
6,0	71,2 ± 4,92	63,1	157,8
8,0	18,2 ± 6,77	31,1	158,4
10,0	5,6 ± 5,63	12,5	158,5

В книге [15] приведено детальное изложение теории Б. Бауле (Baule B. Zu Mitscherlichs Gesetz der physiologischen Beziehungen // Landw. Jahrb. 1918. Vol. 51) относительного второго приближения «закона действия факторов роста». По мнению проф. А.Т. Кирсанова, первое приближение закона Э.А. Митчерлиха охватывало наиболее распространенные почвенные разности, характерные для Восточной Пруссии; совершенно другая ситуация возникает, если при опытах в сосудах вносятся удобрения в 10 раз превосходящие значения доз, используемых на практике; часто такие варианты возникают и на практике, когда используются большие дозы удобрений; рассмотрим основное соотношение «закона действия факторов роста» в виде:

$$\lg(A-y) = \lg(A) - cx \quad (1)$$

или:

$$y(x) = A[1 - 10^{-cx}] \quad (2)$$

[15, с. 72, соотношение (15)].

Соотношения (1) и (2) являются точными частными решениями опубликованного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{dy}{dx} = c_1(A-y). \quad (3)$$

Для относительного повышения урожая можно записать уравнение:

$$\left(\frac{1}{y}\right) \frac{dy}{dx} = c_1 \left(\frac{A-y}{y}\right) \quad (4)$$

[15, с. 72, уравнение (16)],

и специально (Б. Бауле) отмечается: подставляя в это уравнение соответствующие величины $A-y$ и y согласно соотношениям (1) и (2), получим уравнение:

$$\left(\frac{1}{y}\right) \frac{dy}{dx} = c_1 \left(\frac{10^{-cx}}{1-10^{-cx}}\right) \quad (5)$$

[15, с. 72, уравнение (17)],

и специально отмечается следующее допущение: пусть депрессия возрастает пропорционально количеству данного фактора x и равна $2kx$, в этом случае можно записать уравнение:

$$\left(\frac{1}{y}\right) \frac{dy}{dx} = c_1 \left(\frac{10^{-cx}}{1-10^{-cx}}\right) - 2kx \quad (6)$$

[15, с. 73, уравнение (18)].

Интегрируя уравнение (6) можно найти соотношение:

$$\lg(y) = \lg[1 - 10^{-cx}] - kx^2 + c \quad (7)$$

или:

$$y(x) = (1 - 10^{-cx}) \cdot 10^{-kx^2} \cdot 10^c \quad (8)$$

[15, с. 73, уравнение (20)].

Приняв значение постоянной A равным:

$$10^c = A, \quad (9)$$

можно записать конечное выражение для второго приближения «закона действия факторов роста»:

$$y(x) = A(1 - 10^{-cx}) \cdot 10^{-kx^2} \quad (10)$$

[15, с. 73, соотношение (21)],

и специально отмечается следующее: в соотношении (10) имеется два постоянных коэффициента c и k ; коэффициент c Э.А. Митчерлиха считает постоянной величиной для всех растений и условий среды, а константа k принимается постоянной только в пределах данного опыта; она изменяет свою величину в зависимости от типа растения, удобрения, вида почв, климата и т.д.; на величину k сильное влияние оказывает буферность почв: на песчаных почвах значение константы k значительно больше, чем на глинистых или почвах богатых органическими веществами и т.д.

Можно отметить следующие уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = c_1(A-y), \quad (11)$$

$$\left(\frac{1}{y}\right) \frac{dy}{dx} = c_1 \left(\frac{A-y}{y}\right) - 2kx \quad (12)$$

Это два совершенно разных уравнения; соотношение:

$$y(x) = A[1 - 10^{-c_1x}] \quad (13)$$

является точным частным решением уравнения (11) при нулевых начальных условиях; соотношение:

$$y(x) = A(1 - 10^{-c_1x}) \cdot 10^{-kx^2} \quad (14)$$

не является частным решением уравнения (12), это выражение вообще не является решением уравнения (12), поэтому результаты Б. Бауле-Э.А. Митчерлиха относительно второго приближения «закона действия факторов роста» нуждаются в уточнении и дальнейшем развитии; подставляя (14) и производную первого порядка от соотношения (14) в уравнение (12), получим следующее выражение:

$$c_1 \cdot 10^{-kx^2} \ln 10 = (1 - 10^{-c_1x}) [2kx(\ln 10 + 1) + c \ln 10], \quad (15)$$

которое не является тождеством и, следовательно, все результаты относительно второго приближения «закона действия факторов роста» являются ошибочными.

Новая приближенная цифровая модель роста и развития растений. Принимаем справедливость утверждения: урожайность (y) и ее прибавка возрастают при увеличении количества факторов роста (x), пропорционально количеству урожая ($A-y$), не достигшего до предельной потенциальной урожайности (A), и возможному значению урожая ($B+y$), выше некоторого минимального (начального) значения (B) урожая, и поэтому можно записать уравнение:

$$\left(\frac{1}{B+y}\right) \frac{dy}{dx} = c(A-y)(1+2kx), \quad (16)$$

c — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом действия фактора роста; k — коэффициент депрессии роста и развития растения; A — постоянный параметр, определяемый по экспериментальным (опытным) данным и равный потенциальной урожайности растения; B — постоянный параметр, определяемый по экспериментальным данным и равный начальному значению урожая определенной культуры для конкретной почвы, гидрометеороусловий района и ландшафта.

Для решения дифференциального уравнения (16) назначим начальные условия:

$$y(x_0) = y_0, \quad (17)$$

x_0, y_0 — постоянные параметры, определяющие соответственно начальное значение фактора роста (x_0) и начальное значение урожая (y_0), можно принять $y_0=B$.



Решение основного дифференциального уравнения (16), удовлетворяющее начальным условиям (17), можно записать в виде:

$$\ln[(A - y_0)(B + y)] = \ln[(B + y_0)(A - y)] + c(A + B)[(x - x_0) + k(x^2 - x_0^2)], \quad (18)$$

или в виде:

$$\ln \left[\frac{(A - y_0)(B + y)}{(B + y_0)(A - y)} \right] = c(A + B)[(x - x_0) + k(x^2 - x_0^2)]. \quad (19)$$

Значение коэффициента действия фактора роста (c) можно находить на каждом интервале от $x = x_{i-1}$ до $x = x_i$ по формуле:

$$c_i = \frac{\ln[(A - y_{i-1})(B + y_i)] - \ln[(B + y_{i-1})(A - y_i)]}{(A + B)[(x_i - x_{i-1}) + k(x_i^2 - x_{i-1}^2)]}, \quad (20)$$

i – индекс, целое положительное число ($i = 1, 2, 3, \dots$).

При таких условиях урожайность (y_i) можно находить по формуле:

$$y_i(x) = \frac{A(B + y_{i-1}) \exp \left[c_i(A + B)[(x_i - x_{i-1}) + k(x_i^2 - x_{i-1}^2)] \right] - B(A - y_{i-1})}{(B + y_{i-1}) \exp \left[c_i(A + B)[(x_i - x_{i-1}) + k(x_i^2 - x_{i-1}^2)] \right] + (A - y_{i-1})}. \quad (21)$$

Значение потенциальной урожайности (A) при этом определяется по формуле:

$$A + B = \frac{2(B + y_1)(B + y_2)(B + y_3) - (B + y_2)^2(y_1 + y_3 + 2B)}{(B + y_1)(B + y_3) - (B + y_2)^2}. \quad (22)$$

Соотношение (19) можно записать в виде:

$$\left(\frac{1}{A + B} \right) \ln \left[\frac{(A - y_0)(B + y)}{(B + y_0)(A - y_0)} \right] = \alpha + mx + nx^2, \quad (23)$$

где:

$$\alpha = -cx_0(1 + kx_0); \quad m = c; \quad n = ck,$$

α, m, n — коэффициенты, определяемые методом наименьших квадратов; оптимальное значение фактора роста ($x_{кр}$) можно найти из уравнения:

$$m + 2nx_{кр} = 0, \quad (24)$$

или:

$$x_{кр} = -\frac{m}{2n}. \quad (25)$$

Чтобы уменьшить объем вычислительной работы и повысить точность расчетов вместо основного уравнения (16), начальных условий (17) и решения в виде соотношения (19) можно использовать безразмерные единицы (u):

$$u = \frac{y}{A}, \quad v = \frac{x}{A}, \quad (26)$$

и использовать соответственно соотношения:

$$\frac{du}{dv} = cAB(1 + \beta u)(1 - u), \quad (27)$$

$$u(v_0) = u_0, \quad A = \beta B, \quad (28)$$

$$\ln \left[\frac{1 + \beta u}{1 + \beta u_0} \left(\frac{1 - u_0}{1 - u} \right) \right] = cAB(1 + \beta)[(v - v_0) + k(v^2 - v_0^2)]. \quad (29)$$

Формулы (24) и (25) остаются справедливыми.

Примеры расчетов.

Пример 1. Рассмотрим результаты лабораторных опытов Э.А. Митчерлиха, полученные при изучении влияния азотистых удобрений на урожай овса (табл. 2); по опытным данным установлено значение потенциальной урожайности овса ($A = 158,5$ г/сосуд); методом наименьших квадратов [16] для опытных данных таблицы 2 получено уравнение:

$$u(x) = -0,00055 x^2 + 0,00442 x + 0,004217.$$

Оптимальное количество азота на сосуд (по формуле (25)) равно:

$$x_{кр} = \frac{0,00442}{2 \cdot 0,00055} = 4,02 \text{ г/сосуд},$$

что подтверждается экспериментальными данными.

Значение $x_{кр} = 4,02$ г/сосуд является критическим, оно определяет количество азота, превышение которого (в виде азотистых удобрений) будет способствовать уменьшению урожайности овса.

Пример 2. Рассмотрим влияние объема воды на урожай ячменя в опытах Гелльригеля, подробно описанные в монографии Э.Дж. Рэсселя [17]; опытами установлено, что большой объем воды (60-80% от объема полного насыщения песчаной почвы) приводит к уменьшению количества сухого вещества в зерне ячменя (табл. 3).

Таблица 3. Зависимость урожая ячменя от объема снабжения водой [17, с. 49]
Table 3. Dependence of the barley yield on the volume of water supply [17, p. 49]

№ п/п	Опыт x_i (%)	Опыт \bar{x}_i (безразмерные единицы)	Опыт y_i (г/сосуд)	Опыт \bar{y}_i (безразмерные единицы)	Расчет \bar{y}_i (безразмерные единицы)
1	2	3	4	5	6
1	10	0,1	0,72	–	–
2	20	0,2	7,75	0,254415	0,217648
3	30	0,3	9,73	0,359067	0,349539
4	40	0,4	10,51	0,463706	0,432176
5	60	0,6	9,96	0,380263	0,449687
6	80	0,8	8,77	0,298281	0,270180

Ячмень выращивался в специальных сосудах с песчаной почвой, все необходимые питательные вещества в опытах обеспечивались полностью, за исключением соли ($\text{Ca}(\text{NO}_3)_2$), количество которой строго контролировалось по азоту (мг), а значение урожая измерялось с точностью до 1×10^{-3} г [17].

Из данных таблицы 3, используя значения: $y_0 = 0,72$; $y_1 = 7,75$; $y_2 = 9,73$; $y_3 = 10,51$; $B = 0,72$, по формуле (22) найдем максимально возможное (потенциальную урожайность) количество сухого вещества (A) в зерне ячменя:

$$A + 0,72 = \frac{2(0,72 + 7,75)(0,72 + 9,73)(0,72 + 10,51) - (10,45)^2(19,7)}{(0,72 + 7,75)(0,72 + 10,51) - (0,72 + 9,73)^2},$$

или:

$$A + 0,72 = 11,959; \quad A = 10,876; \quad A + B = 11,959.$$

Методом наименьших квадратов получим для опытных данных в безразмерных единицах следующую зависимость:

$$\bar{y}(\bar{x}) = -0,193898 + 2,550275\bar{x} - 2,462721\bar{x}^2,$$

по формуле (25) находим максимально возможный объем воды для полива ячменя:

$$\bar{x}_{кр} = \frac{2,550275}{2 \cdot 2,462721} = 0,518,$$

или:

$$x_{кр} = 51,8 \%,$$

что подтверждается экспериментальными данными ($x_{кр} \approx 52\%$) (табл. 3).

Э.Дж. Рэссель [17] поясняет это тем, что «излишек воды сокращает приток воздуха к корням».

Пример 3. Рассмотрим опытные данные о количестве сухого вещества в соломе ячменя в зависимости от объема воды при поливе, подробно описанные в монографии Э.Дж. Рэсселя [17] (табл. 4).

Таблица 4. Зависимость количества сухого вещества в соломе ячменя (г) от объема воды при поливе [17, с. 49]
Table 4. The dependence of the amount of dry matter in barley straw (g) on the volume of water during irrigation [17, p. 49]

№ п/п	1	2	3	4	5	6
Количество воды*, безразмерные единицы	0,10	0,20	0,30	0,40	0,60	0,80
Масса сухого вещества, г	1,80	5,50	8,20	9,64	11,00	9,47

*1,00 (или 100%) означает количество воды, требуемой для полного насыщения песчаной почвы в сосудах





Из данных таблицы 4, используя значения: $y_0 = 1,8$; $y_1 = 5,5$; $y_2 = 9,64$; $y_3 = 11,00$; $B = 1,8$, по формуле (22) найдем максимально возможную массу сухого вещества (A) в соломе ячменя:

$$A + 1,8 = \frac{2(1,8 + 5,5)(1,8 + 9,64)(1,8 + 11,00) - (11,44)^2(20,1)}{(7,3)(12,8) - (11,44)^2} = 13,161,$$

или:

$$A = 11,361; B = 1,8; A + B = 13,161.$$

Методом наименьших квадратов получим для опытных данных в безразмерных единицах следующую зависимость:

$$\bar{y}(\bar{x}) = -0,157581 + 1,524067\bar{x} - 1,297166\bar{x}^2,$$

по формуле (25) находим максимально возможный объем воды для полива ячменя:

$$\bar{x}_{\text{кр}} = \frac{1,524067}{2 \cdot 1,297166} = 0,587,$$

или:

$$x_{\text{кр}} = 58,7 \%,$$

что подтверждается экспериментальными данными ($x_{\text{кр}} \approx 60\%$) (табл. 4).

В качестве **основных выводов** по работе отметим следующие положения.

1. Показано, что известные положения «второго приближения закона действия факторов роста» Б. Бауле-Э.А. Митчерлиха нуждаются в уточнении, а аналитическое решение является ошибочным.

2. Получено новое решение вопроса о депрессии роста и развития растений, где учтены особенности роста сельскохозяйственных растений; в новой цифровой модели роста и продуктивности принято, что урожайность и ее прибавка возрастают при увеличении количества факторов роста, пропорционально количеству урожая, не достигшего предельной потенциальной урожайности, и возможному значению урожая, выше некоторого минимального значения урожая.

3. Для практических расчетов получены простые расчетные формулы, определяющие коэффициент депрессии, величину урожая и др.

4. Приведены примеры расчетов, иллюстрирующие применение новой цифровой методики.

Список источников

1. Митчерлих Э.А. Потребность почвы в удобрении. Практическое применение в земледелии закона действия факторов роста. М.-Л.: Госиздат, 1928. 70 с.
2. Митчерлих Э.А. Определение потребности почвы в удобрении. М.-Л.: Госиздат сельскохозяйственной и колхозно-кооперативной литературы, 1931. 104 с.
3. Цифровая экономика Российской Федерации. Программа утверждена распоряжением Правительства Российской Федерации от 28 июня 2017 г., № 1632-р.
4. Огневцев С.Б. Концепция цифровой платформы агропромышленного комплекса // Международный сельскохозяйственный журнал. 2018. Т. 61. № 2. С. 16-22.
5. Огневцев С.Б. Актуальные вопросы современной агропродовольственной политики // Международный сельскохозяйственный журнал. 2018. Т. 61. № 4 (364). С. 67-70.
6. Огневцев С.Б. Цифровизация экономики и экономика цифровизации АПК // Международный сельскохозяйственный журнал. 2019. Т. 62. № 2 (368). С. 77-80.
7. Ерешко Ф.И., Кульба В.В., Меденников В.И. Интеграция цифровой платформы АПК с цифровыми платформами смежных отраслей // АПК: экономика, управление. 2018. № 10. С. 34-46.
8. Меденников В.И. Цифровая экосистема АПК: научный подход // Международный сельскохозяйственный журнал. 2022. Т. 65. № 2 (386). С. 116-119.
9. Эльдиева Т.М. Цифровые технологии — надежный спутник современного сельского хозяйства региона // Международный сельскохозяйственный журнал. 2019. Т. 62. № 5 (371). С. 55-57.
10. Сологуб Н.Н., Уланова О.И., Остробородова Н.И., Остробородова Д.А. Проблемы и перспективы цифровых технологий в сельском хозяйстве // Международный сельскохозяйственный журнал. 2021. Т. 64. № 4 (382). С. 28-30.
11. Григулецкий В.Г. Обобщение закона действия факторов роста и продуктивности растений Э.А. Митчерлиха // Масличные культуры. 2022. Вып. 2 (190). С. 18-29.

Информация об авторе:

Григулецкий Владимир Георгиевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, gvg-tnc@mail.ru

Information about the author:

Vladimir G. Griguletsky, doctor of technical sciences, professor, head of the department of higher mathematics, gvg-tnc@mail.ru

12. Григулецкий В.Г. Приближенные цифровые модели роста и продуктивности растений (обзор) // Масличные культуры. 2022. Вып. 3 (191). С. 79-108.

13. Mitscherlich, E.A., Merrec, E. (1909). Eine quantitative Stickstoffanalyse für sehr geringe Mengen. *Landwirtschaftliche Jahrbücher. Zeitschrift für wissenschaftliche Landwirtschaft*, bd. XXXVIII, vol. 7, st. 537-552.

14. Митчерлих Э.А. Почвоведение. М.: Издательство иностранной литературы, 1957. 416 с.

15. Кирсанов А.Т. Теория Митчерлиха, ее анализ и практическое применение. 2-е изд., перераб. и доп. М.-Л.: Сельхозгиз, 1930. 200 с.

16. Григулецкий В.Г., Яценко З.В. Высшая математика для экономистов. Ростов-на-Дону: Феникс, 2004. 640 с.

17. Рассель Э.Дж. Почвенные условия и рост растений. М.: Сельхозгиз, 1931. 440 с.

References

1. Mitcherlikh, E.A. (1928). *Potrebnost' pochvy v udobrenii. Prakticheskoe primeneniye v zemledelii zakona deistviya faktorov rosta* [Soil need for fertilizer. Practical application in agriculture of the law of action of growth factors]. Moscow-Leningrad, Gosizdat Publ., 70 p.
2. Mitcherlikh, E.A. (1931). *Opreделение potrebnosti pochvy v udobrenii* [Determining the need for soil fertilizer]. Moscow-Leningrad, State publishing house of agricultural and collective farm-cooperative literature, 104 p.
3. Tsifrovaya ekonomika Rossiiskoi Federatsii. Programma utverzhdena Rasporyazheniem Pravitel'stva Rossiiskoi Federatsii ot 28 iyunya 2017 g., № 1632-r [Digital economy of the Russian Federation. The program was approved by the Decree of the Government of the Russian Federation dated June 28, 2017, No. 1632-r].
4. Ognivtsev, S.B. (2018). Kontsepsiya tsifrovoy platformy agropromyshlennogo kompleksa [The concept of a digital platform for the agro-industrial complex]. *Mezhdunarodnyi sel'skokhozyaistvennyi zhurnal* [International agricultural journal], vol. 61, no. 2, pp. 16-22.
5. Ognivtsev, S.B. (2018). Aktual'nye voprosy sovremennoi agropromyshlennoi politiki [Topical issues of modern agro-food policy]. *Mezhdunarodnyi sel'skokhozyaistvennyi zhurnal* [International agricultural journal], vol. 61, no. 4 (364), pp. 67-70.
6. Ognivtsev, S.B. (2019). Tsifrovizatsiya ekonomiki i ekonomika tsifrovizatsii APK [Digitalization of the economy and the economy of digitalization of the agro-industrial complex]. *Mezhdunarodnyi sel'skokhozyaistvennyi zhurnal* [International agricultural journal], vol. 62, no. 2 (368), pp. 77-80.
7. Ereshko, F.I., Kul'ba, V.V., Medennikov, V.I. (2018). Integratsiya tsifrovoy platformy APK s tsifrovymi platformami smezhnykh otraslei [Integration of the digital platform of the agro-industrial complex with digital platforms of related industries]. *APK: ekonomika, upravlenie* [AIC: economy, management], no. 10, pp. 34-46.
8. Medennikov, V.I. (2022). Tsifrovaya ehkositema APK: nauchnyi podkhod [Digital ecosystem of the AIC: scientific approach]. *Mezhdunarodnyi sel'skokhozyaistvennyi zhurnal* [International agricultural journal], vol. 65, no. 2 (386), pp. 116-119.
9. El'dieva, T.M. (2019). Tsifrovye tekhnologii — nadezhnyi sputnik sovremenno sel'skogo khozyaistva regiona [Digital technologies are a reliable companion of modern agriculture in the region]. *Mezhdunarodnyi sel'skokhozyaistvennyi zhurnal* [International agricultural journal], vol. 62, no. 5 (371), pp. 55-57.
10. Sologub, N.N., Ulanova, O.I., Ostrobodova, N.I., Ostrobodova, D.A. (2021). Problemy i perspektivy tsifrovoykh tekhnologii v sel'skom khozyaistve [Problems and prospects of digital technologies in agriculture]. *Mezhdunarodnyi sel'skokhozyaistvennyi zhurnal* [International agricultural journal], vol. 64, no. 4 (382), pp. 28-30.
11. Griguletskii, V.G. (2022). Obobshcheniye zakona deistviya faktorov rosta i produktivnosti rastenii Eh.A. Mitcherlikha [Generalization of the law of action of factors of growth and productivity of plants by E.A. Mitcherlich]. *Maslichnye kultury* [Oil crops], no. 2 (190), pp. 18-29.
12. Griguletskii, V.G. (2022). Priblizhennyye tsifrovyye modeli rosta i produktivnosti rastenii (obzor) [Approximate digital models of plant growth and productivity (review)]. *Maslichnye kultury* [Oil crops], no. 3 (191), pp. 79-108.
13. Mitscherlich, E.A., Merrec, E. (1909). Eine quantitative Stickstoffanalyse für sehr geringe Mengen. *Landwirtschaftliche Jahrbücher. Zeitschrift für wissenschaftliche Landwirtschaft*, bd. XXXVIII, vol. 7, st. 537-552.
14. Mitcherlikh, E.A. (1957). *Pochvovedeniye* [Soil Science]. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoi literatury, 416 p.
15. Kirsanov, A.T. (1930). *Teoriya Mitcherlikha, ee analiz i prakticheskoe primeneniye* [Mitcherlich's theory, its analysis and practical application]. Moscow-Leningrad, Sel'khozgiz Publ., 200 p.
16. Griguletskii, V.G., Yashchenko, Z.V. (2004). *Vysshaya matematika dlya ekonomistov* [Higher mathematics for economists]. Rostov-on-Don, Feniks Publ., 640 p.
17. Rehsel, E.Dzh. (1931). *Pochvennye usloviya i rost rastenii* [Soil conditions and plant growth]. Moscow, Sel'khozgiz Publ., 440 p.