

**АНАЛИЗ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОЦЕНКИ
ГИДРАВЛИЧЕСКИХ РИСКОВ**
HYPERBOLIC EQUATIONS ANALYSIS FOR HYDRAULIC RISK ASSESS-
MENT



УДК 631.6

DOI:10.24411/2588-0209-2020-10205

Приходько Игорь Александрович, кандидат техн. наук, доцент, кафедра «Строительства и эксплуатации водохозяйственных объектов», Кубанский государственный аграрный университет имени И. Т. Трубилина, Краснодар

Владимиров Станислав Алексеевич, кандидат с/х. наук, профессор, заведующий кафедрой «Строительства и эксплуатации водохозяйственных объектов», Кубанский государственный аграрный университет имени И. Т. Трубилина, Краснодар

Вербицкий Артем Юрьевич, Обучающийся факультета гидромелиорации, Кубанский государственный аграрный университет имени И. Т. Трубилина, Краснодар

Александров Даниил Александрович, Обучающийся факультета гидромелиорации, Кубанский государственный аграрный университет имени И. Т. Трубилина, Краснодар

Prikhodko Igor Alexandrovich, Candidate of Tech. Sciences, Associate Professor, Department of Construction and Operation of Water Management Facilities, Kuban State Agrarian University named after I. T. Trubilin

Vladimirov Stanislav Alekseevich, Agricultural Candidate Sciences, Professor, Head of the Department of Construction and Operation of Water Management Facilities, Kuban State Agrarian University named after I. T. Trubilin

Verbitsky Artyom Yurievich, Student of the Faculty of Hydromelioration, Kuban State Agrarian University named after I.T. Trubilin, Krasnodar

Alexandrov Daniil Alexandrovich, Student of the Faculty of Hydromelioration, Kuban State Agrarian University named after I.T. Trubilin, Krasnodar

Аннотация.

Уравнения мелкой воды описывают тонкий слой жидкости постоянной плотности в гидростатическом равновесии, ограниченное снизу рельефом дна и сверху свободной поверхностью. Они обладают богатым разнообразием свойств, поскольку имеют бесконечно много законов сохранения. Распространение цунами можно точно описать уравнениями мелкой воды пока волна не приблизится к берегу. Уравнения мелкой воды часто используются для моделирования как океанографических, так и атмосферных потоков жидкости. Численное моделирование двухмерных мелких течений со сложной геометрией, включающей нестационарные потоки и подвижные границы, стало проблемой для исследователей в последние годы. Существует широкий спектр физических ситуаций, представляющих интерес для окружающей среды, таких как течение в открытых каналах и реках, моделирование цунами и наводнений, которые могут быть математически представлены нелинейными системами уравнений. Модели таких систем позволяют прогнозировать районы, которые в конечном итоге пострадают от загрязнения, береговой эрозии и таяния полярных ледников. Комплексное моделирование таких явлений с использованием физических описаний, таких как уравнения Навье-Стокса, часто может быть проблематичным из-за масштаба областей моделирования, а также выделения свободных поверхностей. Целью настоящей работы является выведение и анализ вычислительных гиперболических уравнений в частных производных, называемых уравнениями мелкой воды, которые описывают недисперсионные волны, часто применяемых для моделирования физических явлений в области гидродинамики, внедряемых в математические модели для последующей реализации возможностей компьютерного моделирования и прогнозирования. С помощью данных исследований решается задача по математическому моделированию Волны Кельвина и Росби не только в озерах и реках, но и в океанах. Также имеется возможность рассмотрения частных случаев данного явления для бассейнов, а также с помощью выведенных уравнений имеется возможность моделирования приливов. В статье выведены полностью нелинейные уравнения мелкой воды (и их линеаризованный аналог). Эти уравнения также поддаются дискретизации по вертикали.

Summary

The shallow water equations describe a thin layer of liquid of constant density in hydrostatic equilibrium, limited from below by the bottom topography and from above by the free surface. They have a rich variety of properties, since they have infinitely many conservation laws. The propagation of a tsunami can be accurately described by the equations of shallow water until the wave approaches the

shore. Shallow water equations are often used to model both oceanographic and atmospheric fluid flows. Numerical modeling of two-dimensional shallow currents with complex geometry, including unsteady flows and moving boundaries, has become a challenge for researchers in recent years. There is a wide range of physical situations of interest to the environment, such as flow in open channels and rivers, tsunami and flood simulations, which can be mathematically represented by nonlinear systems of equations. Models of such systems make it possible to predict areas that will ultimately suffer from pollution, coastal erosion and melting of polar glaciers. Complex modeling of such phenomena using physical descriptions, such as the Navier-Stokes equations, can often be problematic due to the scale of the modeling areas, as well as the selection of free surfaces. The purpose of this work is to derive and analyze computational hyperbolic partial differential equations, called shallow water equations, which describe non-dispersive waves, often used to simulate physical phenomena in the field of hydrodynamics, introduced into mathematical models for subsequent implementation of the capabilities of computer modeling and forecasting. With the help of these studies, the problem of mathematical modeling of the Kelvin and Rossby waves is solved not only in lakes and rivers, but also in oceans. It is also possible to consider special cases of this phenomenon for pools, and also using the derived equations, it is possible to simulate tides. The article deduces completely nonlinear shallow water equations (and their linearized analogue). These equations are also amenable to vertical sampling.

Ключевые слова: уравнение мелкой воды, моделирование, гиперболические уравнения, сохранение окружающей среды.

Keywords: shallow water equation, modeling, hyperbolic equations, environmental conservation.

Введение. Климатические изменения, происходящие в мире, приводят к все более частым экстремальным гидрологическим явлениям, часто связанным с наводнениями, селями и оползнями [1]. Государственным администрациям и землевладельцам нужны надежные инструменты для прогнозирования глубины воды, средней скорости и твердого переноса во время прогнозируемых событий [2].

Моделирование мелкой воды, является одним из основных столпов, доступных сегодня для поддержки оценки соответствующего гидравлического риска [3]. Последние достижения в области компьютерных методов и вычислительного оборудования позволяют включать систему уравнений в стандартные инструменты управления государственными органами и частными управляющими как городских, так и пригородных территорий [4]. Модель также может быть инструментом для подхода к моделированию гражданской и гидроинфраструктуры (зданий и сооружений) [5].

В более общих проектах по моделированию природных процессов и предотвращению загрязнения, модель может связывать многие физические процессы, происходящие над землей и под ее поверхностью, такие как теплопередача или химические и биологиче-

ские динамики [6]. Уравнения также можно легко связать с одномерными вертикальными моделями, такими как процесс инфильтрации, приводящий к трансформации дождя в сток, или многофазный вертикальный перенос, происходящий в озерах, лагунах и других естественных водоемах, а также с моделями для изучения речной гидравлики, морфодинамики и переноса наносов [7].

Существует широкий спектр физических ситуаций, представляющих большой интерес, таких как течение, в открытых каналах и реках, моделирование цунами и наводнений, которые могут быть математически представлены нелинейными системами уравнений в частных производных первого порядка, вывод которых предполагает выполнения следующего алгоритма действий [8].

Методы исследования, характеристика объекта исследования.

Вывод уравнений мелкой воды.

Чтобы вывести уравнения мелкой воды, мы начнем с уравнений Эйлера без учета поверхностного натяжения, условие свободной поверхности:

$$p = 0, \quad \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \eta = w, \quad (1)$$

где $z = \eta(x, y, t)$

уравнение импульса:

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho} \nabla p + g\hat{z} = 0, \quad (2)$$

уравнение непрерывности массы:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

нижнее граничное условие:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla (z + h(x, y)) = 0, \quad (4)$$

где $z = -h(x, y)$, p – давление, η – вертикальное смещение свободной поверхности (определяет свободную поверхность воды), $\mathbf{u} = (u, v, w)$ – осредненная по глубине трехмерная скорость, ρ – плотность, g – ускорение свободного падения, $h(x, y)$ – функция задающая рельеф дна (рисунок 1).

Поскольку жидкость имеет постоянную плотность, движение жидкости полностью определяется уравнениями непрерывности массы и импульса соответственно [9], из-за предполагаемого малого аспектного отношения выполняется гидростатическое приближение, для вывода уравнений мелкой воды рассмотрим уравнение сохранения массы.

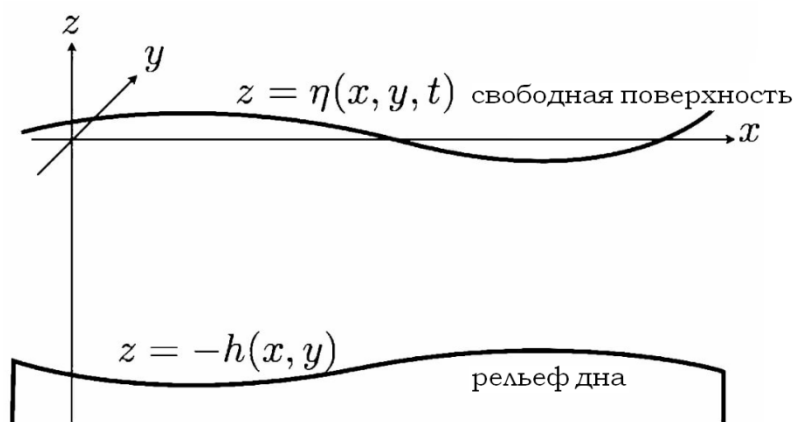


Рисунок 1 – Схематическое изображение системы Эйлера

Интегрируем уравнение непрерывности (3) по вертикали следующим образом

$$0 = \int_{-h}^{\eta} [\nabla \cdot \mathbf{u}] dz, \quad (5)$$

$$= \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right] dz, \quad (6)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz - u|_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + u|_{z=-h} \frac{\partial(-h)}{\partial x}, \\ + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} u dz - v|_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + v|_{z=-h} \frac{\partial(-h)}{\partial y}, \\ + w|_{z=\eta} - w|_{z=-h}, \quad (7)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz - u|_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} u dz - v|_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + w|_{z=\eta}. \quad (8)$$

где нижнее граничное условие (4) использовалось в четвертом ряду. При условии поверхности (1) уравнение (8) становится

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^{\eta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-h}^{\eta} v dz = 0. \quad (9)$$

Для следующего шага мы прибегнем к операции гидростатического приближения, предполагая, что длина волны намного больше глубины жидкости, позволяет нам это сделать – ключевое предположение, лежащее в основе уравнений мелкой воды, которое заключается в малом соотношении сторон, т.е. $H/L \ll 1$, где H – глубина жидкости, а L – горизонтальный масштаб движения. Это дает начало гидростатическому приближению, а оно, в свою очередь, приводит к возможности пренебречь «колеблющейся» природой потока [10]. Однако это не значит, что волнения имеют малую амплитуду, поэтому нелинейными членами не пренебрегаем. Важно отметить, что с помощью гидростатического приближения мы можем пренебречь членом вертикального ускорения, так как добиваемся гидростатического баланса [11], а это значит, что гравитация уравнивает градиент давления в вертикальном уравнении движения, подразумевая, что вертикальные ускорения ничтожны: в (2) и вывести гидростатическое давление, интегрируя вертикальную составляющую уравнения импульса,

$$\int_z^{\eta} \frac{\partial p}{\partial z} dz = - \int_z^{\eta} \rho g dz \\ p(x, y, \eta, t) - p(x, y, z, t) = - (\eta(x, y, t) - z) \\ p(x, y, z, t) = (\eta(x, y, t) - z). \quad (10)$$

где мы применили условие поверхностной проводимости $p(x, y, \eta, t) = 0$. Используя это выражение для гидростатического давления (10) и далее предполагая, что вертикальные колебания в (u, v) отсутствуют, уравнения горизонтального импульса системы мелкой воды получаются следующим образом,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \mathcal{G} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \mathcal{G} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0. \quad (12)$$

Сохранение массы, заданное формулой (9), становится

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(\eta + h)u] + \frac{\partial}{\partial y} [(\eta + h)v] = 0. \quad (13)$$

Тогда уравнения (11), (12) и (13) являются уравнениями мелкой воды (рисунок 2).

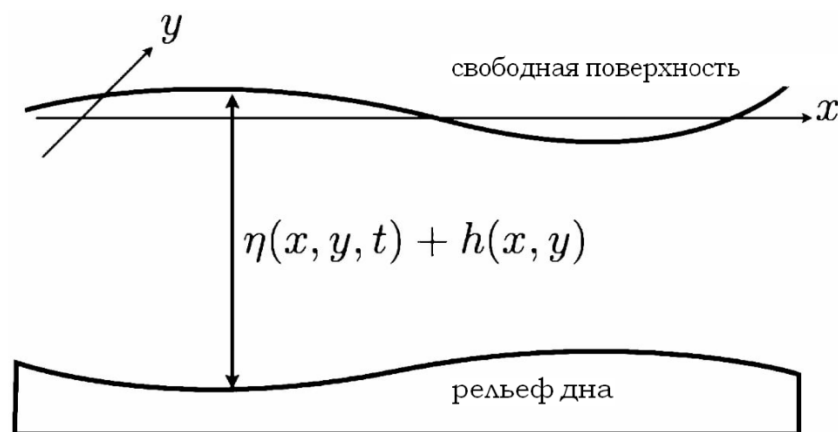


Рисунок 2 – Схематическое изображение системы мелкой воды.

Эти уравнения аналогичны уравнениям для газовой динамики в двумерной системе [12]. Действительно, уравнения, описывающие динамику невязкого, не теплопроводящего, из энтропического (т.е. энтропия постоянна и $p \propto \rho^\gamma$) газа

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho^{\gamma-2} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho^{\gamma-2} \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \quad (16)$$

где $\gamma \equiv C_p / C_v$ показатель адиабаты, а C_p удельная теплоемкость при постоянном давлении, C_v удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Эти уравнения (14), (15) и (16) являются точным аналогом уравнений мелкой воды (13), и уравнения (11) и (12), при условии, если мы отождествим u, v обоих случаях, установим $g(\eta + h) = \rho$, примем плоскую рельефность дна ($H = \text{constant}$) и примем ($\gamma = 2$.)

Если мы рассмотрим уравнения мелкой воды во вращающейся системе отсчета (ось вращения перпендикулярна плоскости $x-y$), то к уравнению импульса следует добавить коэффициент Кориолиса.

В этом случае

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(\eta + h)u] + \frac{\partial}{\partial y}[(\eta + h)v] = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad (19)$$

где f - коэффициент Кориолиса

Математическая структура

В этом разделе мы рассмотрим математическую структуру уравнений мелкой воды.

Гиперболические уравнения в частных производных

Уравнения мелкой воды можно записать в виде матрицы

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \eta \\ u \\ v \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} u & \eta + h & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \eta \\ u \\ v \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} v & 0 & \eta + h \\ 0 & v & 0 \\ g & 0 & v \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \eta \\ u \\ v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Собственные значения матрицы первого коэффициента равны u ,

$$u \pm \sqrt{g(\eta + h)}, \quad (21)$$

Собственные значения матрицы второго коэффициента равны v ,

$$v \pm \sqrt{g(\eta + h)}, \quad (22)$$

Поскольку собственные значения (21) и (22) действительны и различны, уравнения мелкой воды являются гиперболическими дифференциальными уравнениями в частных производных, так же уравнения допускают разрывные (слабые) решения, такими решениями называют разрывы вторых производных при условии непрерывности самого решения и его первых производных [13].

Метод характеристик

Поскольку уравнения мелкой воды представляют собой гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных, метод характеристик может применяться для сведения их к семейству обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если мы примем ($v \equiv 0$) и ($\frac{\partial}{\partial y} \equiv 0$) (двумерные, то есть в плоскости x - z), уравнения мелкой воды становятся,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta + h) + u \frac{\partial}{\partial x}(\eta + h) + (\eta + h) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x}(\eta + h) = g \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (24)$$

Если мы определим $c^2(x, y, t) = g(\eta + h)$, (23) $\times g$ можно записать как

$$\frac{\partial c^2}{\partial t} + u \frac{\partial c^2}{\partial x} + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

так

$$c \left[\frac{\partial(2c)}{\partial t} + u \frac{\partial(2c)}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0. \quad (25)$$

Так как $c(x, y, t) \neq 0$, (25) становится

$$\frac{\partial(2c)}{\partial t} + u \frac{\partial(2c)}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (26)$$

Аналогично, (24) может быть записано как

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial(2c)}{\partial x} = g \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (27)$$

Тогда (27) + (26) и (27) – (26) соответственно дают

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + 2c) + u \frac{\partial}{\partial x}(u + 2c) + c \frac{\partial}{\partial x}(u + 2c) = g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (28)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - 2c) + u \frac{\partial}{\partial x}(u - 2c) + c \frac{\partial}{\partial x}(u - 2c) = g \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (29)$$

Уравнение (28) свидетельствует, что вдоль кривых в плоскости (x, t) ,

$$\frac{dx}{dt} = u + c, \quad (30)$$

определяемой величиной $u + 2c$, меняется согласно

$$\frac{\partial}{\partial t}(u + 2c) + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x}(u + 2c) = \frac{d}{dt}(u + 2c) = g \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (31)$$

А также вдоль кривых

$$\frac{dx}{dt} = u - c, \quad (32)$$

определяемых уравнением (29), можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(u - 2c) + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x}(u - 2c) = \frac{d}{dt}(u - 2c) = g \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (33)$$

Следовательно, если h постоянна, $(u + 2c)$ и $(u - 2c)$ будут являться инвариантами Римана (т.е. функции остаются постоянными вдоль кривых). Если h будет $h = mx + b$, то $\partial h / \partial x$ является постоянной величиной и характеристические уравнения снова могут быть легко интегрированы, причем на этот раз $(u + 2c - gmt)$ и $(u - 2c - gmt)$ – новые инварианты Римана. Важно отметить, что этот метод не обобщает задачи с более сложным рельефом дна и трехмерные (x, y, t) задачи.

Линеаризация уравнений мелкой воды

Чтобы линеаризовать уравнения мелкой воды, мы рассмотрим небольшие возмущения относительно жидкости находящиеся в состоянии покоя. То есть,

$$\eta = 0 + \eta', \quad u = 0 + u', \quad v = 0 + v'. \quad (34)$$

Подставляя (34) в уравнения мелкой воды (11), (12), (13) и пренебрегая членами второго порядка, мы получаем линеаризованные уравнения мелкой воды следующим образом (простые числа опущены)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial (uh)}{\partial x} + \frac{\partial (vh)}{\partial y} = 0, \quad (35)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad (36)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0. \quad (37)$$

Умножив (35) на $\sqrt{g}$, а также (36) и (37) на $\sqrt{h}$, получим,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\eta \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial x} (u \sqrt{h} \cdot \sqrt{gh}) + \frac{\partial}{\partial y} (v \sqrt{h} \cdot \sqrt{gh}) = 0, \quad (38)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (u \sqrt{h}) + \sqrt{gh} \frac{\partial}{\partial x} (\eta \sqrt{g}) = 0, \quad (39)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (v \sqrt{h}) + \sqrt{gh} \frac{\partial}{\partial y} (\eta \sqrt{g}) = 0, \quad (40)$$

Если мы исключим $u \sqrt{h}$ и $v \sqrt{h}$ из приведенных выше уравнений, мы получим линейные двумерные волновые уравнения,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\eta \sqrt{g}) = \nabla \cdot [gh \cdot \nabla (\eta \sqrt{g})]. \quad (41)$$

Фазовая скорость, как и следует из длинноволнового предела, равна $c(x, y) = \sqrt{gh}$, но на этот раз определяется для изменяющегося рельефа дна (т.е. h является функцией как x , так и y , следовательно, $h = h(x, y)$).

Уравнение вихря выводится путем определения ω как $\omega(x, y, t) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ и вычислением $\frac{\partial}{\partial x} (40) - \frac{\partial}{\partial y} (39)$,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0. \quad (42)$$

Это означает, что завихренность остается постоянной во времени. В общем случае поле скоростей (u, v) можно разложить на вращательную и ирротационную части, поэтому u и v можно записать как

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad (43)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad (44)$$

где ψ и ϕ называются функцией потока и потенциалом скорости соответственно.

Используя (43) и (44), уравнение (42) можно записать в виде:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) = 0. \quad (45)$$

Вычислив $\frac{\partial}{\partial x} (39) + \frac{\partial}{\partial y} (40)$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \phi) + \sqrt{g} \nabla^2 (\eta \sqrt{g}) = 0. \quad (46)$$

Вывод: Таким образом, вращательная часть поля скоростей получается путем интегрирования независимого от времени поля завихренности (45) (то есть начальных условий), в то время как и ротационная часть получается из решения (41) и (46). Тем не менее,

ψ и φ не являются полностью независимыми: они «взаимодействуют» при применении боковых граничных условий к полному полю скоростей (43,44).

Список использованной литературы

1. Сафронова, Т.И. О дисциплине «Математическое моделирование процессов в компонентах природы» на факультете гидромелиорации / Т.И. Сафронова, Соколова И.В. // Международный журнал экспериментального образования. 2018. № 3. С. 27-31.
2. Сафронова, Т.И. Теоретическая модель оптимального проектирования агроландшафтов / Т.И. Сафронова, И.А. Приходько // Успехи современного естествознания. 2019. № 3-2. С. 204-209.
3. Владимиров, С.А. Методика оценки сбалансированного земельного использования ресурсов и устойчивости агроландшафтов / С.А. Владимиров, И.А. Приходько, Т.И. Сафронова // International Agricultural Journal. 2020. Т.63. № 2. С.13.
4. Сафронова, Т.И. Информационная модель управления качеством состояния рисовой оросительной системы / Т.И. Сафронова, И.А. Приходько // Труды Кубанского государственного аграрного университета. 2007. № 6. С. 11-15.
5. Сафронова, Т.И. Математическая модель режима функционирования рисовой оросительной системы на примере рисовых полей Кубани / Т.И. Сафронова, И.А. Приходько // International Agricultural Journal. 2020. Т. 63. № 2. С. 30.
6. Сафронова, Т.И. Формирование загрязненного поверхностного стока на сельскохозяйственных угодьях / Т.И. Сафронова, И.А. Приходько // International Agricultural Journal. 2020. Т. 63. № 3. С. 1.
7. Сафронова, Т.И. Математическая модель выбора эколого-адаптивных мелиоративных мероприятий / Т.И. Сафронова, И.А. Приходько // Фундаментальные исследования. 2019. № 9. С. 64-68.
8. Сафронова, Т.И. Анализ оценки земельных ресурсов в сельском хозяйстве / Т.И. Сафронова, И.А. Приходько, Л.Н. Кондратенко // Фундаментальные исследования. 2019. № 5. С. 110 - 114.
9. Владимиров, С. А. Парадигма сбалансированного водопотребления при эксплуатации рисовых оросительных систем в Краснодарском крае / С. А. Владимиров, Н. Н. Малышева, Е. И. Хатхоху // Рисоводство. 2019. № 3 (44). – С. 88-94.
10. Малышева, Н.Н. Приоритетные направления развития мелиорации на Кубани / Н.Н. Малышева, С.Н. Якуба, С.А. Владимиров // Рисоводство. 2019. № 1 (42). – С. 58-66
11. Владимиров, С. А. Теоретические аспекты энергетического подхода к анализу влияния климата предпосевного периода на урожайность риса / С. А. Владимиров, Н. Н. Малышева, Е. И. Хатхоху // Вестник Научно-методического совета по природообустройству и водопользованию. 2019. № 15 (15). – С. 51-58.
12. Владимиров, С. А. Методологические аспекты совершенствования функционирования компонентов рисового ирригированного фонда / С. А. Владимиров, Н. Н. Малышева, Е. И. Хатхоху, С. Н. Якуба // Вестник Научно-методического совета по природообустройству и водопользованию. 2019. № 14 (14). – С. 60-69.
13. Владимиров, С. А. Влияние способов содержания почвы в допосевной период при различных режимах влажности на урожайность риса / С. А. Владимиров // Пути повышения эффективности орошаемого земледелия. Научно-практический журнал. Выпуск № 4(76)/2019. Новочеркасск. – С. 106-110.

14.Владимиров, С.А К вопросу оптимизации режима увлажнения почвы между последовательными посевами риса / С. А. Владимиров // В сборнике: Мелиорация и водное хозяйство Материалы Всероссийской научно-практической конференции (Шумаковские чтения) с международным участием, посвященной 130-летию со дня рождения академика Б. А. Шумакова, в 2-х частях. Новочеркасск, 2019. – С. 22-27.

Spisok ispol'zovannoi literatury

1. Safronova, T.I. O distsipline «Matematicheskoe modelirovanie protsessov v komponentakh prirody» na fakul'tete gidromelioratsii / T.I. Safronova, Sokolova I.V. // Mezhdunarodnyi zhurnal eksperimental'nogo obrazovaniya. 2018. № 3. S. 27-31.

2. Safronova, T.I. Teoreticheskaya model' optimal'nogo proektirovaniya agrolandshaftov / T.I. Safronova, I.A. Prikhod'ko // Uspekhi sovremennogo estestvoznaniya. 2019. № 3-2. S. 204-209.

3. Vladimirov, S.A. Metodika otsenki sbalansirovannogo zemel'nogo ispol'zovaniya resursov i ustoichivosti agrolandshaftov / S.A. Vladimirov, I.A. Prikhod'ko, T.I. Safronova // International Agricultural Journal. 2020. T.63. № 2. S.13.

4. Safronova, T.I. Informatsionnaya model' upravleniya kachestvom sostoyaniya risovoi orositel'noi sistemy / T.I. Safronova, I.A. Prikhod'ko // Trudy Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta. 2007. № 6. S. 11-15.

5. Safronova, T.I. Matematicheskaya model' rezhima funktsionirovaniya risovoi orositel'noi sistemy na primere risovykh polei Kubani / T.I. Safronova, I.A. Prikhod'ko // International Agricultural Journal. 2020. T. 63. № 2. S. 30.

6. Safronova, T.I. Formirovanie zagryaznennogo poverkhnostnogo stoka na sel'skokhozyaistvennykh ugod'yakh / T.I. Safronova, I.A. Prikhod'ko // International Agricultural Journal. 2020. T. 63. № 3. S. 1.

7. Safronova, T.I. Matematicheskaya model' vybora ehkologo-adaptivnykh meliorativnykh meropriyatii / T.I. Safronova, I.A. Prikhod'ko // Fundamental'nye issledovaniya. 2019. № 9. S. 64-68.

8. Safronova, T.I. Analiz otsenki zemel'nykh resursov v sel'skom khozyaistve / T.I. Safronova, I.A. Prikhod'ko, L.N. Kondratenko // Fundamental'nye issledovaniya. 2019. № 5. S. 110 - 114.

9. Vladimirov, S. A. Paradigma sbalansirovannogo vodopotrebleniya pri ehkspluatatsii risovykh orositel'nykh sistem v Krasnodarskom krae / S. A. Vladimirov, N. N. Malysheva, E. I. Khatkhokhu // Risovodstvo. 2019. № 3 (44). – S. 88-94.

10. Malysheva, N.N. Prioritetnye napravleniya razvitiya melioratsii na Kubani / N.N. Malysheva, S.N. Yakuba, S.A. Vladimirov // Risovodstvo. 2019. № 1 (42). – S. 58-66

11. Vladimirov, S. A. Teoreticheskie aspekty ehnergeticheskogo podkhoda k analizu vliyaniya klimata predposevnogo perioda na urozhainost' risa / S. A. Vladimirov, N. N. Malysheva, E. I. Khatkhokhu // Vestnik Nauchno-metodicheskogo soveta po prirodoobustroistvu i vodopol'zovaniyu. 2019. № 15 (15). – S. 51-58.

12. Vladimirov, S. A. Metodologicheskie aspekty sovershenstvovaniya funktsionirovaniya komponentov risovogo irrigirovannogo fonda / S. A. Vladimirov, N. N. Malysheva, E. I. Khatkhokhu, S. N. Yakuba // Vestnik Nauchno-metodicheskogo soveta po prirodoobustroistvu i vodopol'zovaniyu. 2019. № 14 (14). – S. 60-69.

13. Vladimirov, S. A. Vliyanie sposobov soderzhaniya pochvy v doposevnoi period pri razlichnykh rezhimakh vlazhnosti na urozhainost' risa / S. A. Vladimirov // Puti povysheniya ehffektivnosti oroshaemogo zemledeliya. Nauchno-prakticheskii zhurnal. Vypusk № 4(76)/2019. Novocherkassk. – S. 106-110.

14. Vladimirov, S.A K voprosu optimizatsii rezhima uvlazhneniya pochvy mezhdru posledovatel'nyimi posევami risa / S. A. Vladimirov // V sbornike: Melioratsiya i vodnoe khozyaistvo Materi-aly

Vserossiiskoi nauchno-prakticheskoi konferentsii (Shumakovskie chteniya) s mezhdunarodnym uchastiem, posvyashchennoi 130-letiyu so dnya rozhdeniya akademika B. A. Shumakova, v 2-kh chastyakh. Novo-cherkassk, 2019. – S. 22-27.